

MODEL MATEMATIKA PADA PERISTIWA TERJADINYA PELANGI SEKUNDER

Muh. Rifandi¹, Syafruddin Side², Rahmawati³
Program Studi Matematika^{1,2,3}
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Sulawesi Barat

ABSTRAK

Pelangi sekunder merupakan pelangi yang terbentuk karena cahaya dipantulkan dua kali ketika masuk kedalam tetes-tetes air hujan dan terlihat tepat di atas pelangi primer. Syarat terbentuknya pelangi sekunder sama dengan pelangi primer yaitu jika terjadi hujan bersamaan dengan matahari bersinar dari sisi yang lain dan pengamat berada diantara keduanya. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan model matematika pada peristiwa terjadinya pelangi sekunder, menentukan sudut pelangi sekunder dan menentukan sudut warna-warna pelangi sekunder melalui kalkulus diferensial. Metode penelitian ini menggunakan metode studi pustaka. Studi pustaka tersebut disusun berdasarkan kerangka teori yang melandasi cara pemecahan masalah yang meliputi, turunan, nilai maksimum / minimum dan sifat-sifat cahaya. Hasil penelitian ini adalah model matematika sudut deviasi pelangi sekunder yaitu $D_s = 2\theta_1 - 6 \left(\sin^{-1} \left(\frac{n_u \sin \theta_1}{n_a} \right) \right) + 2\pi$. Berdasarkan model tersebut dapat diketahui sudut optimum dalam mengamati pelangi sekunder yaitu 51° . Besar sudut warna pelangi sekunder untuk Merah, Jingga, Kuning, Hijau, Biru, Nila dan Ungu berturut-turut adalah 50.57, 51.12, 51.72, 52.42, 52.78, 53.45 dan 53.60 (dalam derajat). Dapat diketahui bahwa besar sudut pelangi untuk tiap warna pelangi sekunder berbeda, hal inilah yang menjelaskan bahwa pelangi sekunder tersusun dari tujuh buah warna.

Kata Kunci: Model Matematika Pelangi Sekunder, Sudut Pelangi Sekunder.

1. PENDAHULUAN

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha untuk merepresentasi dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau *problem* pada dunia *real* dalam pernyataan matematik, sehingga diperoleh pemahaman dari *problem* dunia *real* ini menjadi lebih tepat. Representasi matematika yang dihasilkan dari proses ini dikenal sebagai “Model Matematika” (Widowati & Sutimin, 2007:2).

Model matematika digunakan dalam banyak disiplin ilmu dan bidang studi yang berbeda. Kita dapat mencari aplikasi model matematika di bidang-bidang seperti fisika, ilmu biologi dan kedokteran, teknik, ilmu sosial dan politik, ekonomi, bisnis dan keuangan, juga *problem-computer*. Tentunya bidang dan tipe aplikasi yang berbeda menghendaki bidang-bidang matematika yang berbeda (Widowati & Sutimin, 2007:2).

Salah satu bentuk pemodelan matematika yang digunakan pada disiplin ilmu berbeda khususnya fisika adalah model matematika pelangi. Pelangi adalah salah satu fenomena alam berwujud dan di waktu bersamaan juga merupakan salah satu tampilan terindah yang ada di alam (Adam, 2003:80).

Pelangi terdiri atas pelangi primer dan pelangi sekunder (Jenkins & White, 1960:456). Pelangi primer terbentuk saat cahaya matahari dipantulkan hanya satu kali ketika menembus

tetes air hujan. Sedangkan pelangi sekunder terbentuk saat cahaya matahari dipantulkan dua kali oleh tetes air hujan dan memancar keluar dengan sudut yang lebih tajam ke arah tanah (Jenskings & White, 1960:457). Urutan warna pelangi sekunder merupakan kebalikan dari susunan warna pelangi primer. Hal ini menyebabkan pelangi sekunder tampak seperti pantulan pelangi primer.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk mengetahui model matematika dari pelangi khususnya untuk pelangi sekunder berbasis kalkulus diferensial. Model matematika yang didapatkan kemudian digunakan untuk mencari besarnya sudut pelangi dan besarnya sudut setiap warna pelangi sekunder tersebut. Selanjutnya, penulis memilih dan mengambil judul “Model Matematika Pada Peristiwa Terjadinya Pelangi Sekunder”.

2. KAJIAN PUSTAKA

2.1 Turunan

Definisi Turunan:

Turunan sebuah fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca “f aksen”) yang nilainya pada sebarang nilai c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Asalkan limit ini ada dan bukan ∞ atau $-\infty$ (Purcell dkk, 2004:111).

Jika limit ini memang ada, dikatakan bahwa f terdiferensialkan di c . Pencarian turunan disebut diferensiasi. Bagian kalkulus yang berhubungan dengan turunan disebut kalkulus diferensial.

2.2 Nilai Maksimum dan Nilai Minimum

Definisi:

Andaikan S daerah asal dari f mengandung titik c , maka dikatakan bahwa:

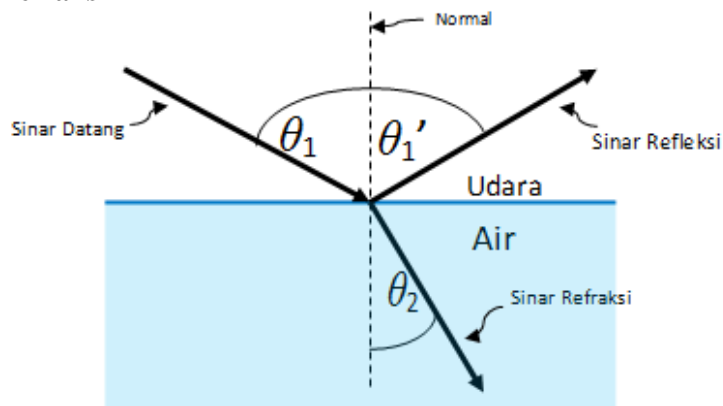
- $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada S jika $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap x di S .
- $f(c)$ adalah nilai minimum f pada S jika $f(c) \leq f(x)$ untuk setiap x di S .
- $f(c)$ adalah nilai ekstrim f pada S jika ia adalah nilai maksimum atau nilai minimum.
- Fungsi yang ingin kita maksimumkan atau minimumkan adalah fungsi objektif.

(Verberg dkk, 2004:167)

2.3 Cahaya

Cahaya adalah radiasi yang dapat mempengaruhi mata (Halliday & Resnick, 1978:578). Cahaya termasuk gelombang elektromagnetik dan memiliki beberapa sifat yang sama dengan sifat gelombang mekanik. Sifat cahaya diantaranya adalah mengalami pemantulan, mengalami pembiasan, mengalami interferensi dan pelenturan. Ada satu sifat yang tidak dimiliki gelombang mekanik sifat yaitu polarisasi cahaya (Suwarna, 2010:5).

2.4 Refleksi dan Refraksi



Gambar 1 Refleksi dan Refraksi pada permukaan batas udara dan air

Pada gambar 1, seberkas cahaya jatuh pada permukaan air, sebagian dipantulkan (direfleksikan) oleh permukaan, sebagian lagi dibelokkan (dibiaskan, direfraksikan) masuk ke dalam air. Berkas datang digambarkan dengan sebuah garis lurus, sinar datang, sejajar dengan arah perambatan. Diasumsikan bahwa berkas datang pada gambar 2.2 adalah gelombang datar, dengan muka gelombangnya tegak lurus kepada sinar datang. Berkas yang dipantulkan dan yang dibiaskan juga digambarkan dengan sinar-sinar. Sudut datang (θ_1), sudut refleksi (θ_1') dan sudut refraksi (θ_2) diukur dari normal bidang batas ke sinar yang bersangkutan.

Berdasarkan eksperimen, diperoleh hukum-hukum mengenai refleksi dan refraksi sebagai berikut:

1. Sinar yang direfleksikan dan yang direfraksikan terletak pada satu bidang yang dibentuk oleh sinar datang dan normal bidang batas di titik datang.

2. Untuk refleksi berlaku:

$$\theta_1' = \theta_1$$

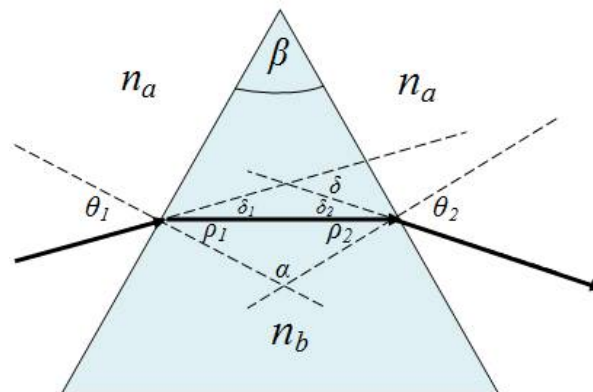
3. Untuk refraksi berlaku:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n_{21}$$

dengan n_{21} adalah indeks refraksi (indeks bias) dari medium 2 terhadap medium 1.

2.5 Pembiasan Oleh Prisma

Sebuah prisma segi empat jika diiris akan membentuk sebuah segitiga, dan jika cahaya didatangkan ke prisma, antara sinar datang dan sinar yang meninggalkan prisma mengalami penyimpangan (deviasi) (Jaja Kustija, 2014:51).



Gambar 2 Pembiasan oleh prisma

n_b merupakan indeks bias didalam prisma, n_a indeks bias diluar prisma, θ_1 sudut datang, δ adalah sudut penyimpangan atau sudut yang dibentuk antara sinar yang datang ke prisma dan sudut sinar yang meninggalkan prisma dan β merupakan sudut pembias prisma atau sudut aspeknnya.

2.6 Deviasi Minium

Diketahui bahwa variabel bebas adalah θ . Jika θ bertambah besar maka δ mula-mula mengecil lalu mencapai minimum dan setelah itu bertambah besar (Jaja Kustija, 2014:53). Maka untuk menentukan δ minimum dicari dengan persamaan:

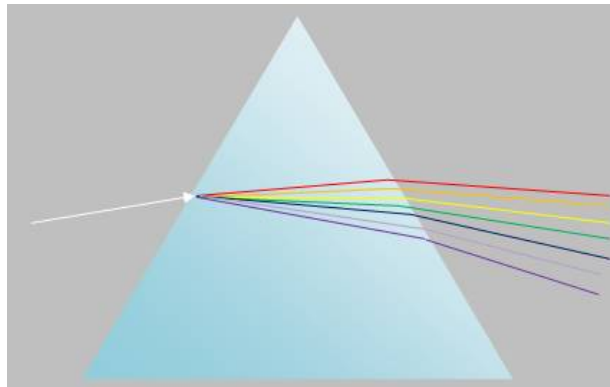
$$\frac{d\delta}{d\theta_1} = 0$$

Untuk medium luar n_1 dan medium didalam prisma n_2 akan didapat:

$$\delta_m = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \beta$$

2.7 Dispersi Cahaya

Jika cahaya datang mempunyai panjang gelombang berbeda-beda (berbagai panjang gelombang), maka setiap panjang gelombang akan dibiaskan melalui sudut yang berbeda-beda, gejala ini disebut dispersi. Indeks bias suatu cahaya pada suatu zat (medium) akan semakin besar. Cahaya warna merah mempunyai indeks bias terkecil sedangkan warna ungu mempunyai indeks bias terbesar (Jaja Kustija, 2014:54).



Gambar 3 Peristiwa dispersi cahaya

Pada gambar 3 terlihat bahwa seberkas cahaya polikromatik diarahkan ke prisma. Cahaya tersebut kemudian terurai menjadi cahaya merah, jingga, kuning, hijau, biru, nila dan ungu. Tiap-tiap cahaya mempunyai sudut deviasi yang berbeda. Selisih antara sudut deviasi untuk cahaya ungu dan merah disebut sudut dispersi (Siswanto dan Sukaryadi, 2009:43). Besar sudut dispersi (ϕ) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\phi = \delta_m \text{ ungu} - \delta_m \text{ merah} \text{ atau } \phi = (n_u - n_m) \beta$$

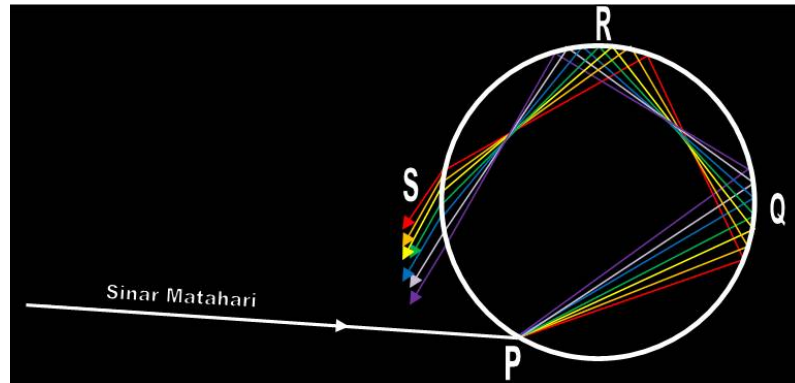
3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan menggunakan metode studi pustaka dengan mengumpulkan berbagai referensi baik berupa buku, jurnal maupun sumber lain yang berkaitan dengan kalkulus diferensial dan fisika optik. Setelah itu, referensi tersebut digunakan untuk memperoleh model matematika pada peristiwa terjadinya pelangi. Penelitian serta penulisan karya ilmiah ini dilakukan di Kampus FMIPA Universitas Sulawesi barat dan Perpustakaan Daerah Kabupaten Majene.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pelangi sekunder merupakan pelangi yang terbentuk karena cahaya dipantulkan dua kali ketika masuk kedalam tetes-tetes air hujan dan terlihat tepat di atas pelangi primer. Syarat terbentuknya pelangi sekunder sama dengan pelangi primer yaitu jika terjadi hujan bersamaan

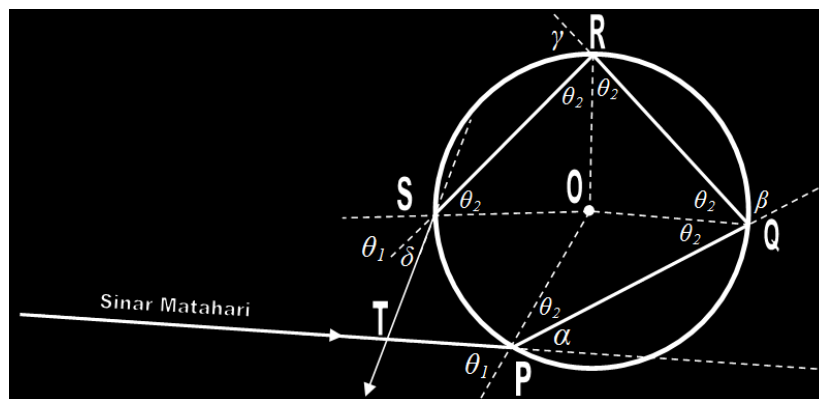
dengan matahari bersinar dari sisi yang lain dan pengamat berada diantara keduanya. Posisi pengamat juga harus membelakangi matahari atau dengan kata lain memandang ke arah hujan. Selain itu, mata hari, pengamat dan pusat busur pelangi juga harus berada pada satu garis lurus. Setelah semua syarat terpenuhi maka sekunder akan terlihat jelas dengan sudut deviasi tertentu. Sudut deviasi pelangi sekunder akan ditentukan menggunakan model matematika. Model matematika pada peristiwa terjadinya pelangi sekunder adalah persamaan atau rumus dalam matematika yang digunakan untuk mencari sudut deviasi pelangi sekunder. Berikut merupakan uraian penentuan model matematika yang didahului dengan simulasi yang menggambarkan proses terjadinya pelangi sekunder.



Gambar 4 Proses terjadinya pelangi

Gambar 4 memperlihatkan bahwa sinar matahari yang datang dari arah berlawanan masuk kedalam tetes air hujan di titik P. Selanjutnya, tetes air hujan berperilaku seperti prisma kecil yang mampu mensdispersikan sinar menjadi tujuh warna berbeda. Setelah itu, sinar dibiaskan menuju ketitik Q. kemudian, sinar kemudian dipantulkan dua kali yaitu dari titik Q menuju R dan dari titik R menuju S. sinar selanjutnya keluar dari tetes air hujan di titik S menuju pengamat.

Secara umum, proses jalannya sinar matahari ketika menembus hingga keluar dari tetesan air hujan beserta sifat-sifat cahaya yang terjadi didalamnya akan dijelaskan oleh gambar di bawah kemudian dilanjutkan dengan uraian penentuan model matematika.



Gambar 5 Proses jalannya sinar secara umum

Sinar matahari yang masuk kedalam tetesan air hujan dengan sudut datang θ_1 seperti pada gambar 5 dibiaskan dan dipantulkan didalam tetes air hujan dengan sudut yang sama, yakni θ_2 . Sudut θ_1 dan θ_2 dihubungkan oleh hukum refraksi, sebagai berikut :

$$n_u \sin \theta_1 = n_a \sin \theta_2$$

Dengan n_u dan n_a berturut-turut adalah indeks bias udara dan indeks bias air.

$$\theta_2 = \sin^{-1} \left(\frac{n_u \sin \theta_1}{n_a} \right)$$

Gambar 5 juga memperlihatkan, sinar yang masuk kedalam tetes air dibiaskan menuju titik **Q** dan menghasilkan garis **PQ** sebagai jejak sinar yang telah terbias tersebut. Perpanjangan sinar pantul dititik **P** menuju titik **O** yang merupakan pusat lingkaran membentuk garis **OP**. Garis **OQ** merupakan garis yang terbentuk antara pusat lingkaran di titik **O** dengan titik bias yang mengenai sisi lingkaran tepatnya di titik **Q**. Selanjutnya, sinar dipantulkan ke titik **R** sehingga membentuk garis **QR**. Sinar kemudian dipantulkan sekali lagi dari titik **R** ke titik **S** dan membentuk garis **RS**. Sinar kemudian keluar dari tetes air hujan di titik **S** dan berpotongan dengan sinar datang di titik **T**. karena panjang garis **PQ**, **QR** dan **RS** sama, maka sudut bias dan sudut pantul yang terbentuk di dalam tetes air hujan juga sama, yaitu θ_2 .

Sudut antara sinar datang dan sinar keluar disebut sudut deviasi sinar (D_s). Hubungan antara D_s dan sudut pada perjalanan sinar datang hingga sinar keluar diberikan pada persamaan berikut.

$$D_s = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

Karena

$$\alpha = \delta = (\theta_1 - \theta_2)$$

$$\beta = \gamma = (\pi - 2\theta_2)$$

Berarti

$$D_s = (\theta_1 - \theta_2) + (\pi - 2\theta_2) + (\pi - 2\theta_2) + (\theta_1 - \theta_2)$$

$$D_s = 2\theta_1 - 6\theta_2 + 2\pi$$

Substitusi nilai θ_2 yang didapatkan sebelumnya,berarti didapatkan

$$D_s = 2\theta_1 - 6 \left(\sin^{-1} \left(\frac{n_u \sin \theta_1}{n_a} \right) \right) + 2\pi$$

Persamaan diatas disebut dengan model matematika dari pelangi sekunder.

Setelah menentukan model matematika pelangi sekunder, selanjutnya akan dicari besar sudut pelangi sekunder. Namun, sebelum menentukan besar sudut pelangi sekunder, maka terlebih dahulu akan dicari besar sudut deviasi minimumnya. Setelah melakukan proses matematika akan didapatkan bahwa sudut pelangi sekunder atau sudut elevasi dari pengamat ke titik tertinggi pelangi sekunder adalah sekitar 50.970093°.

Model matematika pelangi sekunder tersebut juga dapat digunakan untuk menentukan sudut semua warna pelangi sekunder dan akan didapatkan hasil sebagai berikut :

No.	Warna	Indeks Refraksi	Sudut Datang (°)	Sudut Deviasi Minimum (°)	Sudut Warna Pelangi (°)
1	Merah	1.3318	71.881561	230.575710	50.575710
2	Jingga	1.3339	71.813242	231.126388	51.126388
3	Kuning	1.3362	71.739847	231.726011	51.726011
4	Hijau	1.3389	71.652318	232.425297	52.425297
5	Biru	1.3403	71.608625	232.785944	52.785944
6	Nila	1.3429	71.524410	233.452228	53.452228
7	Ungu	1.3435	71.505260	233.605344	53.605344

Tabel 4.2 Daftar Sudut semua Warna Pelangi Sekunder

5. KESIMPULAN

Berdasarkan uraian pada Bab IV, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

1. Model matematika pada peristiwa terjadinya pelangi sekunder adalah :

$$D_s = 2\theta_1 - 6 \left(\sin^{-1} \left(\frac{n_u \sin \theta_1}{n_a} \right) \right) + 2\pi$$

Keterangan :

D_s = Sudut deviasi pelangi

θ_1 = Sudut datang

n_u = Indeks bias udara

n_a = Indeks bias air

6. DAFTAR PUSTAKA

- Adam, J. A. 2003. *Mathematics In Nature : Modeling Patterns in the Natural World*. New Jersey : Princeton University Press.
- Aenurofiq. 2011. *Model Matematika Dari Peristiwa Terjadinya Pelangi (skripsi)*. Semarang : Universitas Negeri Malang.
- Budiyanto, J. 2009. *Fisika Untuk SMA/MA Kelas XII*. Jakarta : Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional.
- Jenkins, F. A. dan H. E. White. 1960. *Fundamentals Of Optics Fourth Edition*. California : Mcgraw-Hill International Editions.
- Kustija, J. 2014. *Fisika Optik*. Bandung : Universitas Pendidikan Indonesia.
- Purcell, E. J, dkk. 2004. *Kalkulus Jilid 1 Edisi Kedelapan*. Jakarta : Erlangga.
- Stewart, J. 2014. *Calculus Eighth Edition Early Transcendentals*. Boston : Cengage Learning.
- Widowati dan Sutimin. 2007. *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang : Universitas Diponegoro.
- Zed, Mestika. 2004. *Metode Penelitian Kepustakaan*. Jakarta : Yayasan Obor Indonesia.